VEKTORANALYSIS

[H28] *Kraftfelder* **[$3+3+3=9$ Punkte]**

Berechnen Sie zu den folgenden Potentialen die zugehörigen Kraftfelder, und skizzieren Sie qualitativ die Äquipotentiallinien in der Ebene $z=0$:

(a) $V(\vec{r}) = \cos(\vec{k}\cdot\vec{r})$,
(b) $V(\vec{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}$,
(c) $V(\vec{r}) = \sqrt{x^4+y^4+z^4+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2}$.

[H29] *Monopol* **[$4+4+3=11$ Punkte]**

Wenn es einen magnetischen Monopol der Ladung $4\pi g$ gäbe, der im Ursprung ruht, hätte dieser ein Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{r^2}\vec{e}_r\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Magnetfelder sind keine Gradientenfelder skalarer Potentiale, sondern sind Rotationen von Vektorpotentialen. In unserem Fall haben wir die Vektorpotentiale

$$\vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{g}{r(r-z)}\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0\end{pmatrix} \text{ für } z<r\,, \quad \vec{A}_N(\vec{r}) = \frac{g}{r(r+z)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0\end{pmatrix} \text{ für } z>-r\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass außerhalb der positiven z-Achse ($x=y=0, z\geq 0$) das Magnetfeld als Rotation des Vektorpotentials $\vec{A}_S$ (S wie „Süd“) geschrieben werden kann, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_S$. Zur Erinnerung: die Rotation ist gegeben als $B_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$.
(b) Zeigen Sie, dass außerhalb der negativen z-Achse ($x=y=0, z\leq 0$) das Magnetfeld als Rotation des Vektorpotentials $\vec{A}_N$ (N wie „Nord“) geschrieben werden kann, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}_N$.
(c) Bestätigen Sie, dass sich beide Vektorpotentiale im gemeinsamen Gültigkeitsbereich, $x^2+y^2>0$, nur um eine sogenannte Eichtransformation unterscheiden, dass also gilt:

$$\vec{A}_N(\vec{r}) - \vec{A}_S(\vec{r}) = \frac{2g}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0\end{pmatrix} = \operatorname{grad}(g\phi) \quad \text{mit} \quad \phi = 2\arctan\frac{y}{x}\,.$$

Hinweis: Für die Rechnungen ist es sinnvoll und erleichternd, $g=1$ zu setzen.

[H30] *Kraft und Potential* **[$2+2+2+2+2=10$ Punkte]**

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewege sich in der xy-Ebene unter der Wirkung der Kraft

$$\begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r})\end{pmatrix} = -m\omega^2\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\,. \tag{1}$$

(a) Wie lautet das zugehörige Potential $V(\vec{r})$?
(b) An welchen Orten zeigt die Kraft zum Ursprung?
(c) Wie lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen, die nur solche Orte durchlaufen? *Hinweis*: Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus (1) dadurch, dass Sie nach Newton $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t)$ setzen.
(d) Wie lautet die allgemeine Lösung? *Hinweis*: Bilden Sie mit Winkelfunktionen eine zwei-parametrige Schar.
(e) Überprüfen Sie für die allgemeine Lösung, dass die Energie $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t))$ zeitunabhängig ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!